第 4 节 数列拔高小题专项（★★★★）

强化训练

提醒：本节包含大量压轴小题，难度很高，请同学们做好心理准备.

1.（2023 •全国模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(20-n)\cdot(\frac{3}{2})^n$，则$a_n$取得最大值时，$n=$_____.

答案：17 或 18

解析：要分析a_n的最大值，可先作差判断数列$\{a_n\}$的单调性，

由题意，$a_{n+1}-a_n=(19-n)\cdot(\frac{3}{2})^{n+1}-(20-n)\cdot(\frac{3}{2})^n=(\frac{3}{2})^n\cdot[\frac{3}{2}(19-n)-20+n]=(\frac{3}{2})^n\cdot\frac{17-n}{2}$，

当$1\le n\le 16$时，$a_{n+1}-a_n>0$，所以$a_{n+1}>a_n$；当$n=17$时，$a_{n+1}-a_n=0$，所以$a_{17}=a_{18}$；

当$n\ge 18$时，$a_{n+1}-a_n<0$，所以$a_{n+1}<a_n$；故$a_1<a_2<\cdots<a_{17}=a_{18}>a_{19}>a_{20}>\cdots$，

所以当a_n取得最大值时，n的值为 17 或 18.

2.（2023 • 广东联考 • ★★★）数学家康托（Cantor）在线段上构造了一个不可数点集：康托三分集. 将闭区间$[0,1]$均分为三段，去掉中间的区间段$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，余下的区间长度为$a_1$；再将余下的两个区间$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$分别均分为三段，并各自去掉中间的区间段，余下的区间长度为a_2，以此类推，不断地将余下各区间段均分为三段，并各自去掉中间的区间段. 重复这一过程，余下的区间集合即为康托三分集，记数列$\{a_n\}$表示第n次操作后余下的区间长度.

（1）$a_4=$_____；（2）若$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$n^2a_n\le\lambda a_4$，则实数λ的取值范围是_____.

答案：（1）$\frac{16}{81}$；（2）$[\frac{50}{3},+\infty)$

解析：由所给信息可知每次操作后，余下区间的长度都为操作前的$\frac{2}{3}$，所以$a_4=(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$，$a_n=(\frac{2}{3})^n$；

故$n^2a_n\le\lambda a_4$即为$n^2\cdot(\frac{2}{3})^n\le\frac{16}{81}\lambda$ ①，

要求λ的取值范围，需求出$n^2\cdot(\frac{2}{3})^n$的最大值，把它看成通项，可先作差判断该数列的单调性，

令$b_n=n^2\cdot(\frac{2}{3})^n$，则$b_{n+1}-b_n=(n+1)^2\cdot(\frac{2}{3})^{n+1}-n^2\cdot(\frac{2}{3})^n=(\frac{2}{3})^n\cdot[\frac{2}{3}(n+1)^2-n^2]=(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{-n^2+4n+2}{3}$，

当$n\le 4$时，$-n^2+4n+2=n(4-n)+2>0$，所以$b_{n+1}-b_n>0$，故$b_{n+1}>b_n$；

当$n\ge 5$时，$-n^2+4n+2=n(4-n)+2\le n\cdot(-1)+2=2-n<0$，所以$b_{n+1}-b_n<0$，故$b_{n+1}<b_n$，

所以$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 > b_6 > b_7 > \cdots$，故$(b_n)_{\max}=b_5=25\times(\frac{2}{3})^5$，

由①知$\frac{16}{81}\lambda\ge b_n$恒成立，所以$\frac{16}{81}\lambda\ge 25\times(\frac{2}{3})^5$，解得：$\lambda\ge\frac{50}{3}$.

3.（2023 • 全国模拟 • ★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\log_2(a_n+1)$，若$\{a_n\}$是递增数列，则a_1的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,\sqrt{2})$　　（C）$(-1,0)$　　（D）$(1,+\infty)$

答案： A

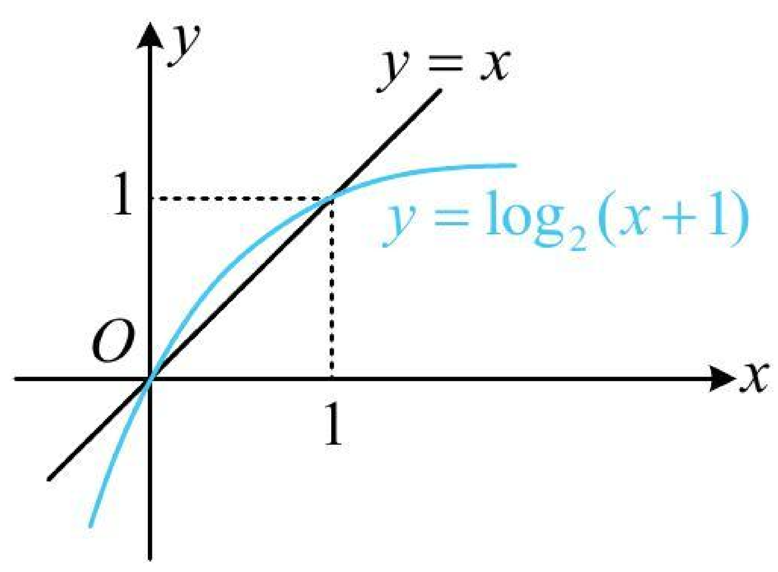
解析： $\{a_n\}$是递增数列$\Leftrightarrow a_{n+1}>a_n$恒成立，又$a_{n+1}=\log_2(a_n+1)$，所以$\log_2(a_n+1)>a_n$ ①，

可先由①求出a_n的取值范围，这是超越不等式，可画图来看，

函数$y=\log_2(x+1)$和$y=x$的大致图象如图，由图可知不等式①的解集为$0<a_n<1$；

于是问题转化成分析当$0<a_n<1$恒成立时，首项a_1应满足的范围，

首先应有$0<a_1<1$，注意到$a_2=\log_2(a_1+1)$，所以$0<a_2<1$，同理，$a_3=\log_2(a_2+1)$，所以$0<a_3<1$，…，以此类推，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$0<a_n<1$，所以a_1的取值范围是$(0,1)$.



4.（2022 • 佛山统考 • ★★★）（多选）已知$a_n=2n-1$，$b_n=3n-1$，将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公共项按从小到大的顺序组成一个新的数列$\{c_n\}$，设$\{c_n\}$的前n项和为S_n，则下列说法正确的是（　　）

（A）$2023\in\{c_n\}$　　（B）$c_{2023}=b_{4046}$　　（C）$S_{2023}\in\{a_n\}$　　（D）$S_{2023}\in\{b_n\}$

答案： BCD

解法 1： 作为选择题，可先把两个数列前面的若干项列出来，看看公共项是哪些，并寻找规律，

数列$\{a_n\}$中的项为 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，…，

数列$\{b_n\}$中的项为 2，5，8，11，14，17，20，23，26，…，

观察可得两个数列的公共项为 5，11，17，23，…，

所以$\{c_n\}$构成首项为 5，公差为 6 的等差数列，

故$c_n=5+(n-1)\cdot 6=6n-1$，

数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n(5+6n-1)}{2}=3n^2+2n$；

A 项，令$6n-1=2023$可得$n=\dfrac{1012}{3}\notin\mathbf{N}^*$，

所以 2023 不是$\{c_n\}$中的项，故 A 项错误；

B 项，$c_{2023}=6\times 2023-1$，$b_{4046}=3\times 4046-1$

$=3\times 2\times 2023-1=6\times 2023-1$，

所以$c_{2023}=b_{4046}$，故 B 项正确；

C 项，$S_{2023}=3\times 2023^2+2\times 2023$，

若算出结果再判断，则计算量大，其实此处只需分析S_{2023}的奇偶即可，

3×2023^2 为正奇数，2×2023 为正偶数 $\Rightarrow S_{2023}$ 为正奇数，

所有正奇数都在 $\{a_n\}$ 中，从而 $S_{2023}\in\{a_n\}$，故 C 项正确；

D 项，只要 S_{2023} 能变形成 $3n-1$ 这种结构，此选项就正确，故无需算出结果，凑 $3n-1$ 的形式即可，

$S_{2023}=3\times 2023^2+2\times 2023=3\times 2023^2+3\times 1349-1$

$=3\times(2023^2+1349)-1\Rightarrow S_{2023}\in\{b_n\}$，故 D 项正确.

解法 2：上述求 c_n 和 S_n 的过程是观察归纳出来的，若要严格论证，可用通项来建立等量关系，

设数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与数列 $\{b_n\}$ 的第 m 项相等，

即 $2n-1=3m-1$，整理得：$n=\dfrac{3m}{2}(m,n\in\mathbf{N}^*)$，

当且仅当 m 为正偶数时，$3m$ 能被 2 整除，

此时 n 为正整数，于是 m 可取 2，4，6，…，

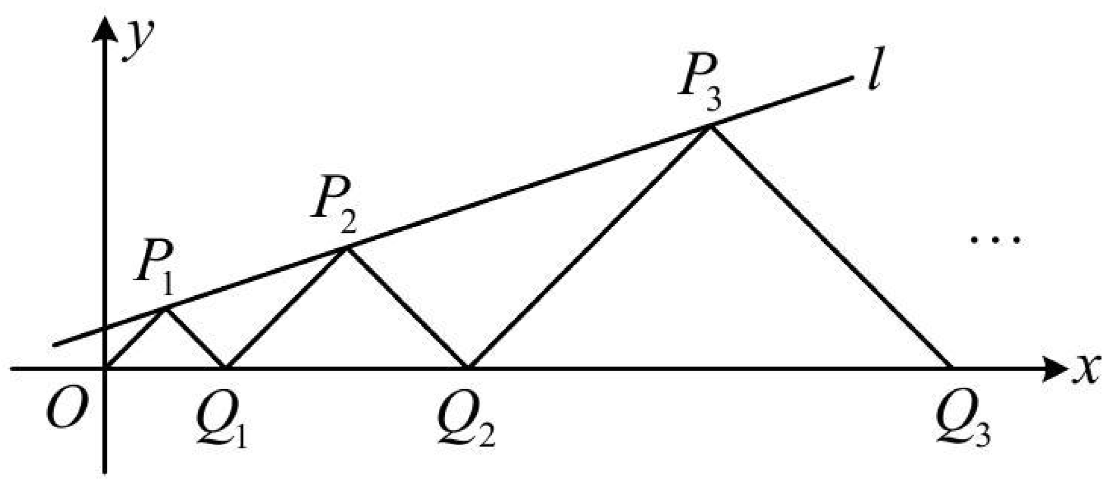
所以数列 $\{b_n\}$ 的偶数项即为两个数列的公共项，

故 $c_n=b_{2n}=3\times 2n-1=6n-1$，

所以 $\{c_n\}$ 为等差数列，故 $S_n=\dfrac{n(c_1+c_n)}{2}=\dfrac{n(5+6n-1)}{2}$

$=3n^2+2n$，接下来判断选项的过程同解法 1.

5．（2023·四川模拟·★★★★）如图，直线 $l:y=\dfrac{1}{3}x+1$ 上的点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与 x 轴正半轴上的点 $Q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 及原点 O 构成一系列等腰直角三角形 ΔOP_1Q_1，$\Delta Q_1P_2Q_2$，$\Delta Q_2P_3Q_3$，…，$\Delta Q_{n-1}P_nQ_n$，且 $\angle P_i=90^\circ(i=1,2,\cdots,n)$，记点 Q_n 的横坐标为 a_n，则 $a_1=$______；$a_n=$______.



答案：3；$3\times 2^n-3$

解法 1：要求 a_1，可先联立直线 OP_1 和直线 l 的方程求 P_1 的坐标，

ΔOP_1Q_1 为等腰直角三角形，且 $\angle OP_1Q_1=90^\circ\Rightarrow\angle P_1OQ_1=45^\circ\Rightarrow$ 直线 OP_1 的斜率为 1，其方程为 $y=x$，

联立 $\begin{cases}y=x\\ y=\dfrac{1}{3}x+1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，所以 $P_1(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，从而 $|OQ_1|=\sqrt{2}|OP_1|=\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=3$，故 $Q_1(3,0)$，即 $a_1=3$；

要求 a_n，应先建立递推关系式，从图形来看，可由 Q_{n-1} 和 Q_n 的坐标求出 P_n 的坐标，代入直线 l 的方程，

因为 $\Delta Q_{n-1}P_nQ_n$ 是等腰直角三角形，所以 P_n 的横坐标为 $\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}$，纵坐标等于 $\dfrac{1}{2}|Q_{n-1}Q_n|$，即 $\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}$，

故 $P_n(\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2},\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2})$，代入 $y=\dfrac{1}{3}x+1$ 可得 $\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}+1$，整理得：$a_n=2a_{n-1}+3$ ①，

要由式①求 a_n，可变形后用累加法，由①可得 $a_n-2a_{n-1}=3$，两端同除以 2^n 可得 $\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{3}{2^n}$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^n}$，$\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}=\frac{3}{2^{n-1}}$，$\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}-\frac{a_{n-3}}{2^{n-3}}=\frac{3}{2^{n-2}}$，…，$\frac{a_3}{2^3}-\frac{a_2}{2^2}=\frac{3}{2^3}$，$\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{3}{2^2}$，

以上各式累加可得 $\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{3}{2^n}+\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^2}=\frac{\frac{3}{4}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]$，

所以 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]=3-3\times(\frac{1}{2})^n$，故 $a_n=3\times 2^n-3$；又 $a_1=3$ 也满足上式，所以 $a_n=3\times 2^n-3(n\in\mathbf{N}^*)$.

解法 2：求 a_1 和得到 $a_n=2a_{n-1}+3$ 的过程同解法 1，接下来求 a_n 也可用待定系数法来构造，递推式中除 a_n 和 a_{n-1} 外，其余部分为常数项，故可设 $a_n+\lambda=2(a_{n-1}+\lambda)$，即 $a_n=2a_{n-1}+\lambda$，与 $a_n=2a_{n-1}+3$ 对比知 $\lambda=3$，

因为 $a_n=2a_{n-1}+3$，所以 $a_n+3=2(a_{n-1}+3)$，又 $a_1+3=6$，所以 $\{a_n+3\}$ 是首项为 6，公比为 2 的等比数列，

从而 $a_n+3=6\times 2^{n-1}$，故 $a_n=6\times 2^{n-1}-3=3\times 2^n-3$.

6.（2023·重庆模拟·★★★★）记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2.3]=2$，$[-1.2]=-2$．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{7}{3}$，且 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，则 $[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}]=$______.

答案：0

解析：要求的式子涉及数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 2023 项和，故先由所给递推式把 $\frac{1}{a_n}$ 变出来，

因为 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，所以 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ①，

接下来只需两端取倒数，即可裂项产生 $\frac{1}{a_n}$，先判断两边是否可能为 0，

由题意，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=(a_n-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，且 $a_1=\frac{7}{3}>0$，所以 $a_n>0$ 恒成立，

因为 $a_1>0$ 且 $a_1\ne 1$，所以 $a_2=a_1^2-a_1+1\ne 1$，同理，由 $a_2>0$ 且 $a_2\ne 1$ 可得 $a_3=a_2^2-a_2+1\ne 1$，…，

以此类推，数列 $\{a_n\}$ 中所有项均为大于 0 且不等于 1，故式①可化为 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，

所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，故 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}-1}-\frac{1}{a_{2024}-1}$

$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2024}-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{a_{2024}-1}$ ②，

还需估计 a_{2024} 的范围，才能得出 $\frac{3}{4}-\frac{1}{a_{2024}-1}$ 的范围，可先判断数列 $\{a_n\}$ 的单调性，

由 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ 可得 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$，所以 $a_{n+1}>a_n$，从而 $a_{2024}>a_1=\frac{7}{3}$，故 $0<\frac{3}{4}-\frac{1}{a_{2024}-1}<\frac{3}{4}$，

结合式②可得 $0<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}<\frac{3}{4}$，所以 $[\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}]=0$.

7.（2023·牡丹江模拟·★★★★）数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<1$，$e^{a_{n+1}}=(3-a_n)e^{a_n}$，则下列说法正确的是（）

（A）数列$\{a_n\}$为递减数列

（B）存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$a_n<0$

（C）存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$a_n>2$

（D）存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$a_n>\dfrac{4}{3}$

答案：D

解析：所给递推式左右都有指数结构，不好处理，可两端取对数，先分析两侧是否均大于 0，

由$\mathrm{e}^{a_{n+1}}=(3-a_n)\mathrm{e}^{a_n}$可知$3-a_n>0$，所以$a_n<3$，将$\mathrm{e}^{a_{n+1}}=(3-a_n)\mathrm{e}^{a_n}$两端取对数可得$a_{n+1}=\ln(3-a_n)+a_n$ ①，

此递推式右侧为超越结构，直接变形处理不易，尝试把a_n看成自变量，构造函数分析，

设$f(x)=\ln(3-x)+x(x<3)$，则$a_{n+1}=f(a_n)$，且$f'(x)=\dfrac{1}{3-x}\cdot(-1)+1=\dfrac{2-x}{3-x}$，

所以$f'(x)>0\Leftrightarrow x<2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<3$，故$f(x)$在$(-\infty,2)$上↗，在$(2,3)$上↘，

题干给出了a_1的范围，可先由①研究a_2的范围，寻找规律，

因为$0<a_1<1$，所以$f(0)<a_2=f(a_1)<f(1)$，即$\ln 3<a_2<\ln 2+1$ ②，

选项 B、C 让判断$a_n<0$、$a_n>2$能否成立，故考虑a_n与区间$(0,2)$的关系，

注意到$(\ln 3,\ln 2+1)\subseteq(0,2)$，所以$0<a_2<2$，故$f(0)<a_3=f(a_2)<f(2)$，即$\ln 3<a_3<2$，所以$a_3\in(0,2)$，

以此类推，数列$\{a_n\}$中所有项都在$(0,2)$上，即$0<a_n<2$恒成立，故选项 B、C 均错误；

有了$0<a_n<2$，可结合式①判断$\{a_n\}$的单调性，由①可得$a_{n+1}-a_n=\ln(3-a_n)>0$，所以$a_n<a_{n+1}$，

从而$\{a_n\}$是递增数列，故 A 项错误，到此已可得出选 D，若要论证 D 选项，可估算前几项的范围，

由②可得$a_2\in(1,2)$，所以$a_3=f(a_2)>f(1)=\ln 2+1>\dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3}$，故 D 项正确.

8．（2022·辽宁模拟·★★★★）设$[x]$表示不超过x的最大整数，正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，

且$a_n+2S_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}(n\geq 2)$，则$[\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}]=$_____.

答案：16

解析：给出a_n与S_n混搭的关系式，要分析的是$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前 80 项和，故考虑将$a_n$换成$S_n-S_{n-1}$，消去$a_n$，

因为$a_n+2S_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}$，所以$S_n-S_{n-1}+2S_{n-1}=\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}$，整理得：$S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geq 2)$，

所以$\{S_n^2\}$是公差为 1 的等差数列，又$a_1=1$，所以$S_1^2=a_1^2=1$，故$S_n^2=1+(n-1)\times 1=n$，

因为$\{a_n\}$是正项数列，所以$S_n>0$，从而$S_n=\sqrt{n}$，故$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；

观察发现$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$无法求和，故考虑放缩，由$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$联想到可裂项求和的结构$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$和$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，

一方面，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=2(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$，

所以 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}>2(-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{80}+\sqrt{81})=2(-1+\sqrt{81})=16$；

另一方面，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}=2(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n})$，

所以 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}<2(-\sqrt{0}+\sqrt{1}-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\cdots-\sqrt{79}+\sqrt{80})=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$；

由于 $17<8\sqrt{5}<18$，所以 $8\sqrt{5}$ 这部分可能放缩过度了，为了提高精度，可尝试从第二项起开始放缩，

$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}=1+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}<1+2(-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\cdots-\sqrt{79}+\sqrt{80})=1+2(-1+4\sqrt{5})=8\sqrt{5}-1$，

所以 $16<\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}<8\sqrt{5}-1<17$，故 $[\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{80}}]=16$.

【反思】在对通项进行放缩后，若发现求和的精度不够，可尝试少放缩几项，例如从第二项或从第三项开始放缩，以提高精度.

9．（2022•南通期中•★★★★）（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，则（　　）

（A）$a_{n+1}\ge 2a_n$　　（B）$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 是递增数列　　（C）$\{a_{n+1}-4a_n\}$ 是递增数列　　（D）$a_n\ge n^2-2n+2$

答案：ABD

解法 1：A 项，要判断 $a_{n+1}\ge 2a_n$ 是否成立，可作差比较，并结合递推式消去 a_{n+1} 来看，

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow a_{n+1}=a_n^2+1\Rightarrow a_{n+1}-2a_n=a_n^2+1-2a_n=(a_n-1)^2\ge 0$，所以 $a_{n+1}\ge 2a_n$，故 A 项正确；

B 项，所给递推式有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 这一结构，故可将右侧看成自变量为 a_n 的函数来分析，先研究 a_n 的范围，

$a_{n+1}=a_n^2+1\ge 1$，结合 $a_1=1$ 可得 $a_n\ge 1$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

又由 A 项结论知 $a_{n+1}\ge 2a_n>a_n$，所以 $\{a_n\}$ 为递增数列，故当 n 增大时，a_n 增大且 $a_n\in[1,+\infty)$，

结合函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上↗知 $f(a_n)$ 也增大，

又 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}=f(a_n)$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 增大，从而 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 是递增数列，故 B 项正确；

C 项，仿照 B 项的分析方法，可由递推式消去 $a_{n+1}-4a_n$ 中的 a_{n+1}，看成关于 a_n 的函数来分析其单调性，

$a_{n+1}=a_n^2+1\Rightarrow a_{n+1}-4a_n=a_n^2+1-4a_n=(a_n-2)^2-3$，设 $g(x)=(x-2)^2-3$，记 $b_n=a_{n+1}-4a_n$，则 $b_n=g(a_n)$，

注意到 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上↘，在 $(2,+\infty)$ 上↗，所以 $g(1)>g(2)$，

因为 $a_1=1$，所以 $a_2=a_1^2+1=2$，从而 $g(a_1)>g(a_2)$，故 $b_1>b_2$，所以 $\{b_n\}$ 不是递增数列，

即 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ 不是递增数列，故 C 项错误；

D 项，由 A 项知 $a_{n+1} \geq 2a_n$，将其递推下去可得到一个类似于等比数列通项的不等式，

因为 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1} \geq 2a_n$，所以 $a_n \geq 2a_{n-1} \geq 2^2 a_{n-2} \geq 2^3 a_{n-3} \geq \cdots \geq 2^{n-2} a_2 \geq 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1}$ ①，

故只需看 $2^{n-1} \geq n^2 - 2n + 2$ 是否成立，左边为关于 n 的指数结构，右边是二次结构，随着 n 的增长，左边的增长速率更快，所以当 n 充分大时，该式必然成立，通过检验发现当 $n = 1,2$ 以及 $n \geq 6$ 时，$2^{n-1} \geq n^2 - 2n + 2$ 恒成立，故只需看当 $n = 3$，4，5 时，放缩前 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$ 是否成立，可单独代值检验，

前面已求得 $a_2 = 2$，所以 $a_3 = a_2^2 + 1 = 5$，$a_4 = a_3^2 + 1 = 26$，$a_5 = a_4^2 + 1 = 677$，

经检验，都满足 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$；所以 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$ 恒成立，故 D 项正确.

解法 2：A、B、C 三项的判断同解法 1，对于 D 项，也有其它放缩方法，在 $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ 中 a_{n+1} 和 a_n 不齐次，先通过放缩化为齐次结构，

$a_{n+1} = a_n^2 + 1 \Rightarrow 1 = a_{n+1} - a_n^2$，因为 $a_n \geq 1$，所以 $a_n^2 \geq a_n$，从而 $1 = a_{n+1} - a_n^2 \leq a_{n+1} - a_n$，故 $a_{n+1} \geq a_n + 1$，

由此递推下去也能得到一个类似于等差数列通项的不等式，

所以 $a_n \geq a_{n-1} + 1 \geq (a_{n-2} + 1) + 1 = a_{n-2} + 2 \geq a_{n-3} + 3 \geq \cdots \geq a_2 + n - 2 \geq a_1 + n - 1 = n$，

好像没达到证明 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$ 的目的，我们还可利用 $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ 升次再来看，

从而 $a_{n+1} = a_n^2 + 1 \geq n^2 + 1$，故当 $n \geq 2$ 时，$a_n \geq (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$；

又 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$，所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n \geq n^2 - 2n + 2$，故 D 项正确.

【反思】当由递推式无法求出通项时，若能通过放缩得到 $a_{n+1} \geq qa_n (q > 0)$，则可逐级递推得到 $a_n \geq a_1 q^{n-1}$；若能通过放缩得到 $a_{n+1} \geq a_n + d$，则可逐级递推得到 $a_n \geq a_1 + (n-1)d$.